25/4/2018

ΟΜΑΔΑ ΠΗΛΙΚΟ

• Κανονικές υποομάδες: $H \triangleleft G \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} gH = Hg$

Θεώρημα Η υποομάδα H της G είναι κανονική, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{gHg^{-1} = H}, \ \forall g \in G$$

Απόδειξη: $(\Longrightarrow)$ $H \triangleleft G$ και έστω $g \in G$.

Τότε: $gH = Hg \Rightarrow gH \cdot g^{-1} = Hg \cdot g^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{gHg^{-1} = H}$

$(\Longleftarrow)$ $gHg^{-1} = H \Rightarrow gHg^{-1} \cdot g = Hg \Rightarrow$

$\Rightarrow gH = Hg \Longrightarrow \boxed{H \triangleleft G}$.

Θεώρημα Η υποομάδα H της G είναι κανονική, αν και μόνο αν ισχύει: $\boxed{gHg^{-1} \subseteq H}$, $\forall g \in G$

• **Απόδειξη**: ($\Longrightarrow$) Έστω $H \trianglelefteq G \xrightarrow[\text{θεώρημα}]{\text{προηγούμενο}} gHg^{-1}=H$

$$\Rightarrow \boxed{gHg^{-1}\subseteq H}$$

($\Longleftarrow$) $gHg^{-1}\subseteq H, \ \forall g\in G$ (1)

Για $g^{-1}\in G$, έχω: $g^{-1}H(g^{-1})^{-1}\subseteq H \Rightarrow$

$\Rightarrow g^{-1}Hg\subseteq H \Rightarrow gHg^{-1}\supseteq H$ (2)

• Από (1) & (2): $gHg^{-1}=H \Rightarrow \boxed{H\trianglelefteq G}$

$\Rightarrow$ H: κανονική

⚠ Αν G: αβελιανή, τότε κάθε υποομάδα της είναι κανονική.

• $H\leq G \Rightarrow gH=\{gh/h\in H\} \overset{G:\text{αβελιανή}}{=} \{hg/h\in H\}$

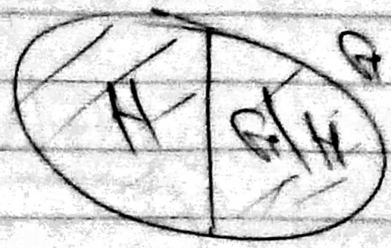
$= Hg \Rightarrow \boxed{H\trianglelefteq G}$

▶ **Άσκηση**: Έστω $H\leq G$ με δείκτη δύο ($[G:H]=2$). Δείξτε ότι $H\trianglelefteq G$.

• **Λύση**: (i) Αν $g\in H \Rightarrow g*H=H$ (πράξη με στοιχείο της ομάδας)
και $H*g=H \Rightarrow \boxed{g*H=H*g}$

(ii) $g\notin H \Rightarrow g*e=g\in gH\neq H \Rightarrow \boxed{gH\neq H}$

• Αντιμεταθετικά: $\boxed{gH = G\setminus H}$ (1)



• $g \notin H$
$e g = g \in Hg \notin H$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow H \neq Hg \Rightarrow \boxed{Hg = G\setminus H}$ (2)

Από (1) & (2): $gH = Hg \Rightarrow \boxed{H \trianglelefteq G}$

▶ Ο τρόπος γραφής ενός συμπλόκου **δεν** είναι μοναδικός:

$aH = bH \Rightarrow b*e = b \in bH = aH \Rightarrow b \in aH \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{b = a\cdot h}$

Άρα: $\boxed{aH = ah\cdot H}$

▶ **Παράδειγμα** ▶ S_3: $H = \langle(1,2)\rangle = \{I, (1,2)\}$

• $(1,2,3)\cdot H = (1,2,3)\circ\underbrace{(1,2)}_{\in H}\cdot H = (1,3)\cdot H$

▶ $\mathbb{Z}$: $H = 7\mathbb{Z} \Rightarrow 3+7\mathbb{Z} = 10+7\mathbb{Z} = -4+7\mathbb{Z} = \dots$

▸ G : ομάδα και $H \triangleleft G$

$G/H = \{\alpha H \mid \alpha \in G\}$ → τα αριστερά σύμπλοκα

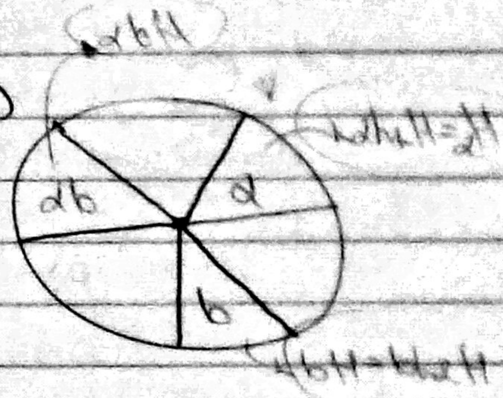
ομάδα πηλίκο

▸ $\alpha H \cdot bH = \alpha b H$

Και: $\alpha h_1 H \cdot b h_2 H = \alpha h_1 \cdot b h_2 H$ (1)

• Έχω ότι: $h_1 b = Hb = bH \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h_1 b = b \cdot h_3}$



• Από (1): $\alpha h_1 H \cdot b h_2 H = \alpha h_1 b h_2 H =$

$= \alpha \cdot b h_3 h_2 H \overset{h_3 h_2 \in H}{=\!=} \alpha b H$

• Άρα: $\boxed{\alpha H \cdot bH = \alpha h_1 H \cdot b h_2 H = \alpha b H}$

$\boxed{▸\ 2^{ος}\ \text{τρόπος}}$ (πράξη καλά ορισμένη)

$\alpha H \cdot bH \overset{H \triangleleft G}{=\!=} \alpha b H \cdot H = \boxed{\alpha b H}$

• Έστω $\alpha,\beta,\gamma \in G$. Τότε:

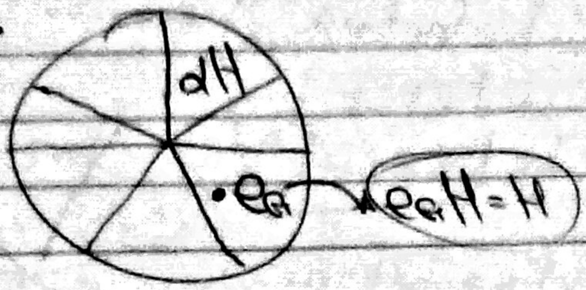
$$(\alpha H \cdot \beta H)\gamma H = \alpha\beta H \cdot \gamma H = \underline{\alpha\beta\gamma H}$$

και

$$\alpha H \cdot (\beta H \cdot \gamma H) = \alpha H \cdot \beta\gamma H = \underline{\alpha\beta\gamma H}.$$

. Άρα, ισχύει η προσεταιριστική.

•



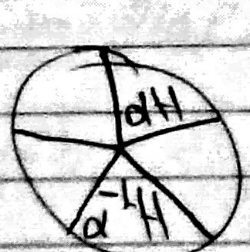
$\cdot\ \alpha H \cdot e_G H = \alpha \cdot e_G H = \underline{\alpha H}$

και:

$\cdot\ e_G H \cdot \alpha H = e_G \cdot \alpha H = \underline{\alpha H}$

$\Rightarrow$ Το $e_G H$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G/H.

•



Το αντίστροφο

. Έστω $\alpha H \in G/H$. Τότε:

$\cdot\ \alpha H \cdot \alpha^{-1} H = \alpha \cdot \alpha^{-1} H = \underline{e_G H}$

και:

$\cdot\ \alpha^{-1} H \cdot \alpha H = \alpha^{-1} \cdot \alpha H = \underline{e_G H}$

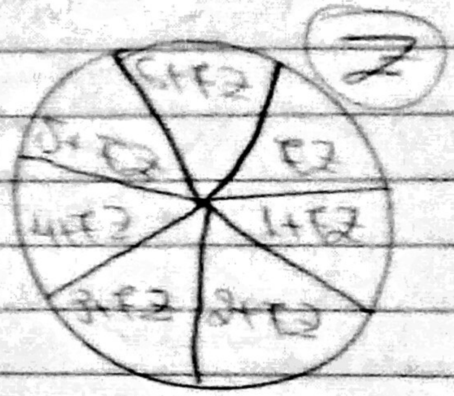
• Άρα η G/H είναι ομάδα!!!

Παράδειγμα: $\mathbb{Z}$ και $H = 7\mathbb{Z}$

- Η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή. Άρα κάθε υποομάδα της είναι κανονική. Άρα $H \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

- Αριστερά – Δεξιά Σύμπλοκα:

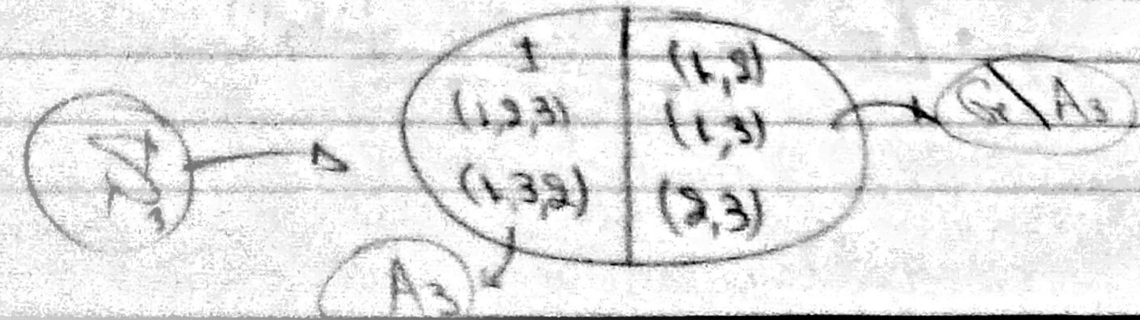
1ο) $0+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$
2ο) $1+7\mathbb{Z} = \{1+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$
3ο) $2+7\mathbb{Z} = \{2+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$
4ο) $3+7\mathbb{Z} = \{3+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$
5ο) $4+7\mathbb{Z} = \{4+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$
6ο) $5+7\mathbb{Z} = \{5+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$
7ο) $6+7\mathbb{Z} = \{6+7\kappa \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$



Παράδειγμα: $A_3 = \{I, (1,2,3), (1,3,2)\} \trianglelefteq S_3$
↳ Όλες οι άρτιες μεταθέσεις

- $[S_3 : A_3] = \dfrac{|S_3|}{|A_3|} = \boxed{2} \Rightarrow \boxed{A_3 \trianglelefteq S_3}$

- $S_3/A_3 = \{\{I, (1,2,3), (1,3,2)\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\}\}$



Ισομορφισμός

• $S_3/A_3 = \{ I A_3, (1\,2) A_3 \} = \langle (1\,2) \cdot A_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

Θεωρία Έστω $\varphi : G \to G$ ομομορφισμός ομάδων.

• $H = \ker\varphi \trianglelefteq G$

• Αποδεικνύεται ότι: $G/\ker\varphi \cong \varphi(G) = \mathrm{Im}\varphi$

→ $\exists$ απεικόνιση f, τ/ω:

$$\boxed{f(\alpha\ker\varphi) = \varphi(\alpha)}, \quad \alpha\ker\varphi \in G/\ker\varphi, \ \alpha \in G$$

Θεώρημα Κάθε κυκλική ομάδα, είναι ισόμορφη, είτε με την $\mathbb{Z}$, είτε με την $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, για κάποιο φυσικό αριθμό n.

• Απόδειξη: Θεωρώ απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \to G = \langle \alpha \rangle = \{ \alpha^u \mid u \in \mathbb{Z} \}$, με $\boxed{\varphi(u) = \alpha^u}$.

• Έχω: $\varphi(u+w) = \alpha^{u+w} = \alpha^u \cdot \alpha^w = \varphi(u) \cdot \varphi(w)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi : \text{ομομορφισμός}}$.

• Η συνέχεια στο επόμενο μάθημα ....